模块二 求通项与求和

第 1 节 数列通项的核心求法（★★★）

强化训练

1．（2022・上海模拟・★★）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_n=a_{n-1}+\lg\dfrac{n}{n-1}(n\ge 2)$，则$a_{100}=$______.

答案：4

解析：观察递推公式发现可变形成$a_n-a_{n-1}=f(n)$这种结构，故考虑用累加法求a_{100}，

因为$a_n=a_{n-1}+\lg\dfrac{n}{n-1}(n\ge 2)$，所以$a_n-a_{n-1}=\lg\dfrac{n}{n-1}$，

故$a_{100}-a_{99}=\lg\dfrac{100}{99}$，$a_{99}-a_{98}=\lg\dfrac{99}{98}$，$a_{98}-a_{97}=\lg\dfrac{98}{97}$，…，$a_3-a_2=\lg\dfrac{3}{2}$，$a_2-a_1=\lg\dfrac{2}{1}$，

以上各式相加得：$a_{100}-a_1=\lg\dfrac{100}{99}+\lg\dfrac{99}{98}+\lg\dfrac{98}{97}+\cdots$

$+\lg\dfrac{3}{2}+\lg\dfrac{2}{1}=\lg(\dfrac{100}{99}\times\dfrac{99}{98}\times\dfrac{98}{97}\times\cdots\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{1})=\lg 100=2$，

又$a_1=2$，所以$a_{100}=a_1+2=4$.

2．（2023・全国模拟・★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$(2n-1)a_{n+1}=(2n+1)a_n$，则$a_n=$______.

答案：$2n-1$

解析：观察递推公式发现可变形成$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$这种结构，故考虑用累乘法求$a_n$，

因为$(2n-1)a_{n+1}=(2n+1)a_n$，所以$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2n+1}{2n-1}$，

故当$n\ge 2$时，$a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\cdots\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot a_1$

$=\dfrac{2n-1}{2n-3}\times\dfrac{2n-3}{2n-5}\times\dfrac{2n-5}{2n-7}\times\cdots\times\dfrac{5}{3}\times\dfrac{3}{1}\times 1=2n-1$，

又$a_1=1$也满足上式，所以$\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_n=2n-1$.

3．（2022・吉林长春模拟・★★）已知数列a_1，$\dfrac{a_2}{a_1}$，$\dfrac{a_3}{a_2}$，…，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，…是首项为 1，公比为 2 的等比数列，则下列数中是数列$\{a_n\}$中的项的是（　　）

（A）16　（B）128　（C）32　（D）64

答案：D

解析：看到a_1，$\dfrac{a_2}{a_1}$，$\dfrac{a_3}{a_2}$，…，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$这些式子，想到累乘即可得到a_n，

由题意，$a_1=1$，$\frac{a_2}{a_1}=2^1$，$\frac{a_3}{a_2}=2^2$，…，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2^{n-1}$，

所以当 $n\geq 2$ 时，$a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}=1\times 2^1\times 2^2\times\cdots\times 2^{n-1}=2^{1+2+\cdots+(n-1)}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$，

又 $a_1=1$ 也满足上式，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$，故 $a_4=2^6=64$，选 D.

4.（★★）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=2$，且 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列. 证明：$\{a_n+n\}$ 是等比数列，并求 a_n.

证明：由题意，$\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是首项为 $a_2-2a_1=0$，公差为 1 的等差数列，

所以 $a_{n+1}-2a_n=0+(n-1)\times 1=n-1$，故 $a_{n+1}=2a_n+n-1$ ①，

（要证 $\{a_n+n\}$ 是等比数列，只需证 $\frac{a_{n+1}+n+1}{a_n+n}$ 为常数，可先由式①凑出 $a_{n+1}+n+1$ 和 a_n+n）

由①可得 $a_{n+1}+n+1=2a_n+n-1+n+1=2(a_n+n)$ ②，

（还需验证首项不为 0 才是等比）

又 $a_1+1=2$，结合式②知 $\{a_n+n\}$ 的所有项均不为 0，

所以 $\frac{a_{n+1}+n+1}{a_n+n}=2$，从而 $\{a_n+n\}$ 是首项和公比均为 2 的等比数列，故 $a_n+n=2^n$，所以 $a_n=2^n-n$.

5.（2022·甘肃酒泉模拟·★★）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$. 设 $b_n=\frac{1}{a_n-1}$，证明 $\{b_n\}$ 是等差数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：（要证 b_n 是等差数列，只需证 $b_{n+1}-b_n$ 为常数）

由题意，$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}$ ①，

（要进一步计算此式，可将递推式代入，消去 a_{n+1} 再化简）

又 $a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$，代入①得：$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2-\frac{1}{a_n}-1}-\frac{1}{a_n-1}$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{a_n}}-\frac{1}{a_n-1}=\frac{a_n}{a_n-1}-\frac{1}{a_n-1}=\frac{a_n-1}{a_n-1}=1$，

所以 $\{b_n\}$ 是公差为 1 的等差数列，

又 $a_1=2$，所以 $b_1=\frac{1}{a_1-1}=1$，故 $b_n=1+(n-1)\times 1=n$，

所以 $\frac{1}{a_n-1}=n$，故 $a_n=1+\frac{1}{n}$.

6.（2023·江西南昌模拟·★★★）已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，且 $a_n=2a_{n-1}-n+2(n\geq 2)$.

（1）求 a_2，a_3，并证明 $\{a_n-n\}$ 是等比数列；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：（1）（由递推公式求前几项，可直接对 n 赋值）

因为当 $n\ge 2$ 时，$a_n=2a_{n-1}-n+2$，所以 $a_2=2a_1-2+2=2a_1=4$，$a_3=2a_2-3+2=2a_2-1=7$；

（要证 $\{a_n-n\}$ 是等比数列，只需证 $\dfrac{a_n-n}{a_{n-1}-(n-1)}$ 是常数，先由所给递推公式把 a_n-n 凑出来）

由 $a_n=2a_{n-1}-n+2$ 可得 $a_n-n=(2a_{n-1}-n+2)-n=2[a_{n-1}-(n-1)]$ ①，

又 $a_1-1=1\ne 0$，结合式①知 $\{a_n-n\}$ 所有项均不为 0，所以 $\dfrac{a_n-n}{a_{n-1}-(n-1)}=2(n\ge 2)$，故 $\{a_n-n\}$ 是等比数列.

（2）由（1）可得 $\{a_n-n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，所以 $a_n-n=1\times 2^{n-1}$，故 $a_n=2^{n-1}+n$.

7.（2022 • 全国模拟 • ★★★）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_2=\dfrac{3}{2}$. 证明数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是等比数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：（要证 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是等比数列，只需证 $\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}$ 为常数，故先由所给递推式凑出 $a_{n+2}-a_{n+1}$ 和 $a_{n+1}-a_n$）

由题意，$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$，两端同时减去 a_{n+1} 得：$a_{n+2}-a_{n+1}=3a_{n+1}-2a_n-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$ ①，

（此时不要急于把 $a_{n+1}-a_n$ 除到左侧，需说明该数列所有项都不为 0）

又 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_2=\dfrac{3}{2}$，所以 $a_2-a_1=1$，结合式①可得数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 所有项均不为 0，故 $\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=2$，

所以 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，故 $a_{n+1}-a_n=2^{n-1}$，（要进一步求出 a_n，可用累加法）

所以当 $n\ge 2$ 时，$\begin{cases}a_2-a_1=2^0\\ a_3-a_2=2^1\\ \cdots\cdots\\ a_n-a_{n-1}=2^{n-2}\end{cases}$，将这些式子累加可得 $a_n-a_1=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-2}=\dfrac{1-2^{n-1}}{1-2}=2^{n-1}-1$，

故 $a_n=2^{n-1}-1+a_1=2^{n-1}-\dfrac{1}{2}$，又 $a_1=\dfrac{1}{2}$ 也满足 $a_n=2^{n-1}-\dfrac{1}{2}(n\ge 2)$，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=2^{n-1}-\dfrac{1}{2}$.

8.（★★）设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=4$，$a_n=3a_{n-1}+2n-1(n\ge 2)$，求 a_n.

解：（递推式中除 a_n 和 a_{n-1}，余下的为关于 n 的一次函数，这种结构的前后项可设为 $A(n-1)+B$ 和 $An+B$，故设 $a_n+An+B=3[a_{n-1}+A(n-1)+B]$，即 $a_n=3a_{n-1}+2An-3A+2B$，与 $a_n=3a_{n-1}+2n-1$ 对比可得 $\begin{cases}2A=2\\ -3A+2B=-1\end{cases}$，解得：$A=B=1$）

因为 $a_n=3a_{n-1}+2n-1$，所以 $a_n+n+1=3[a_{n-1}+(n-1)+1]$，又 $a_1=4$，所以 $a_1+1+1=6\ne 0$，

故 $\{a_n+n+1\}$ 是首项为 6，公比为 3 的等比数列，所以 $a_n+n+1=6\times 3^{n-1}=2\times 3^n$，故 $a_n=2\times 3^n-n-1$.

9.（2023 • 全国模拟 • ★★★）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}-2a_n=3^n$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解法 1：（由本节例 1 变式 2 知可在 $a_{n+1}-2a_n=3^n$ 的两端同除以 2^{n+1}，转化成用累加法处理的结构）

因为 $a_{n+1}-2a_n=3^n$，所以 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{3^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2})^n$，

设 $b_n=\frac{a_n}{2^n}$，则 $b_1=\frac{a_1}{2^1}=\frac{1}{2}$，且 $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2})^n$，

所以当 $n\ge 2$ 时，$b_2-b_1=\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2})^1$，

$b_3-b_2=\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2})^2$，$\cdots$，$b_n-b_{n-1}=\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2})^{n-1}$，

将以上各式累加可得 $b_n-b_1=\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2})^1+\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2})^2+\cdots$

$$+\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2})^{n-2}+\frac{1}{2}\times(\frac{3}{2})^{n-1}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}[1-(\frac{3}{2})^{n-1}]}{1-\frac{3}{2}}=(\frac{3}{2})^n-\frac{3}{2}，$$

所以 $b_n=(\frac{3}{2})^n-\frac{3}{2}+b_1=(\frac{3}{2})^n-1$，又 $b_1=\frac{1}{2}$ 也满足上式，

所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $b_n=(\frac{3}{2})^n-1$，

即 $\frac{a_n}{2^n}=(\frac{3}{2})^n-1$，所以 $a_n=3^n-2^n$.

解法 2：（本题也可用待定系数法构造，由递推式中 3^n 这部分可构造前后项 $\lambda\cdot 3^n$ 和 $\lambda\cdot 3^{n+1}$，故可设 $a_{n+1}+\lambda\cdot 3^{n+1}=2(a_n+\lambda\cdot 3^n)$，即 $a_{n+1}=2a_n+2\lambda\cdot 3^n-\lambda\cdot 3^{n+1}=2a_n-\lambda\cdot 3^n$，与 $a_{n+1}=2a_n+3^n$ 对比可得 $\lambda=-1$）

因为 $a_{n+1}-2a_n=3^n$，所以 $a_{n+1}=2a_n+3^n$，故 $a_{n+1}-3^{n+1}=2(a_n-3^n)$，

又 $a_1-3^1=-2$，所以 $\{a_n-3^n\}$ 是首项为 -2，公比为 2 的等比数列，从而 $a_n-3^n=-2\times 2^{n-1}=-2^n$，故 $a_n=3^n-2^n$.

10.（★★★★）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$(2n-1)a_{n+1}-(2n+1)a_n=2$，求 a_n.

解：（观察递推公式，发现有大下标的乘小系数，小下标的乘大系数的特征，故同除以系数）

由题意，$(2n-1)a_{n+1}-(2n+1)a_n=2$，两端同除以 $(2n-1)(2n+1)$ 得 $\frac{a_{n+1}}{2n+1}-\frac{a_n}{2n-1}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$ ①，

（把 $\frac{a_n}{2n-1}$ 看作整体，式①属于用累加法求通项的情形，右侧的 $\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$ 恰好也可裂项求和）

设 $b_n=\frac{a_n}{2n-1}$，则 $b_1=a_1=1$，且式①即为 $b_{n+1}-b_n=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$，故当 $n\ge 2$ 时，有

$b_2-b_1=1-\frac{1}{3}$，$b_3-b_2=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$，$b_4-b_3=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$，$\cdots$，$b_{n-1}-b_{n-2}=\frac{1}{2n-5}-\frac{1}{2n-3}$，$b_n-b_{n-1}=\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}$，

以上各式累加可得 $b_n-b_1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-5}-\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}=1-\frac{1}{2n-1}$，

因为 $a_1=1$，所以 $b_n=b_1+1-\frac{1}{2n-1}=2-\frac{1}{2n-1}=\frac{4n-3}{2n-1}$，即 $\frac{a_n}{2n-1}=\frac{4n-3}{2n-1}$，故 $a_n=4n-3(n\ge 2)$，

又 $a_1=1$ 也满足上式，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=4n-3$.

11.（2022 • 全国模拟 • ★★★★）在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$(n^2+1)a_{n+1}=2(n^2-2n+2)a_n$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：（观察递推公式发现可变形成 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$ 这种结构，故考虑累乘法求通项）

因为 $(n^2+1)a_{n+1}=2(n^2-2n+2)a_n$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2(n^2-2n+2)}{n^2+1}$，

（为了便于累乘时约分，我们把分子配方，变形成和分母一致的结构）故 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2[(n-1)^2+1]}{n^2+1}$，

所以当 $n\ge 2$ 时，$\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{1^2+1}$，$\frac{a_3}{a_2}=\frac{2\times(1^2+1)}{2^2+1}$，$\frac{a_4}{a_3}=\frac{2\times(2^2+1)}{3^2+1}$，…，$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{2[(n-3)^2+1]}{(n-2)^2+1}$，

$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2[(n-2)^2+1]}{(n-1)^2+1}$，

将以上各式累乘可得：$\frac{a_n}{a_1}=\frac{2}{1^2+1}\times\frac{2\times(1^2+1)}{2^2+1}\times\frac{2\times(2^2+1)}{3^2+1}\times\cdots\times\frac{2[(n-3)^2+1]}{(n-2)^2+1}\times\frac{2[(n-2)^2+1]}{(n-1)^2+1}=\frac{2^{n-1}}{(n-1)^2+1}$，

又 $a_1=2$，所以 $a_n=\frac{2^{n-1}}{(n-1)^2+1}a_1=\frac{2^n}{(n-1)^2+1}$，

因为 $a_1=2$ 也满足上式，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=\frac{2^n}{(n-1)^2+1}$.

12.（2023 •福建质检 •★★★★）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=8$，$a_{2n-1}+a_{2n+1}=\log_2 a_{2n}$，$a_{2n}a_{2n+2}=16^{a_{2n+1}}$，证明：$\{a_{2n-1}\}$ 是等差数列.

证明：（条件的两个等式分别为对数、指数结构，不妨把指数结构取对数，统一起来再看）

由 $a_{2n}a_{2n+2}=16^{a_{2n+1}}$ 可得 $\log_2(a_{2n}a_{2n+2})=\log_2 16^{a_{2n+1}}$，

所以 $\log_2 a_{2n}+\log_2 a_{2n+2}=4a_{2n+1}$ ①，

（要证的是 $\{a_{2n-1}\}$ 为等差数列，故应消去①中左侧的两项，可将题干的另一等式进 n 并代入）

因为 $a_{2n-1}+a_{2n+1}=\log_2 a_{2n}$，所以 $a_{2n+1}+a_{2n+3}=\log_2 a_{2n+2}$，

将上述两式代入①得 $(a_{2n-1}+a_{2n+1})+(a_{2n+1}+a_{2n+3})=4a_{2n+1}$，

所以 $a_{2n+3}-a_{2n+1}=a_{2n+1}-a_{2n-1}$，故 $\{a_{2n-1}\}$ 是等差数列.

【反思】本题由于条件一个是指数式、一个是对数式，不统一，所以我们将指数式取对数，统一结构，这种操作思想在其它章节偶尔也会用到.